Журнал экспериментальной и теоретической физики

Т. 68 *1975* *Вып. 2*

ТРИ ТИПА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА — МАКСВЕЛЛА

Ю. А. Хлестков

Для центрально-симметричных нестационарных миров из пылевидного вещества и электромагнитного поля зарядов получены три типа точных решений задачи Коши для уравнения тяготения, зависящие от двух произвольных функций радиальной координаты и константы. Получено выражение для предельной энергии частиц, ускоряющихся электрическим полем и рассеивающихся в поле изотропного излучения в таких мирах.

I. Рассмотрим 4-системы (миры) из пылевидного вещества с плотностью энергии ε_s и электромагнитного поля с плотностью энергии ε_f, создаваемого зарядами с плотностью ρ_f, с метрикой

$$ds^2 = e^\nu d\tau^2 - e^\lambda dr^2 - R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

в сопровождающих системах отсчета в теории тяготения [1]. Если $R^\cdot \neq 0$, $R' \neq 0$ (точка и штрих означают дифференцирование по τ и r) везде, кроме конечного числа гиперповерхностей, задача сводится к решению уравнений:

$$\mathscr{E} = 4\pi R(1 + e^{-\nu}R^{\cdot 2} - e^{-\lambda}R'^2 - \Lambda R^2/3)/\varkappa, \tag{1}$$

$$\mathscr{E}^\cdot = 4\pi R^2 R^\cdot \varepsilon_f, \tag{2}$$

$$\mathscr{E}' = 4\pi R^2 R'(\varepsilon_f + \varepsilon_s), \tag{3}$$

$$\varepsilon_f^\cdot + 4\varepsilon_f R^\cdot/R = 0, \tag{4}$$

$$\varepsilon_f' + 4\varepsilon_f R'/R - (8\pi\varepsilon_f)^{1/2}\rho_f e^{\lambda/2} = 0, \tag{5}$$

$$\rho_f^\cdot + \rho_f(\lambda^\cdot + 4R^\cdot/R)/2 = 0, \tag{6}$$

$$\varepsilon_s^\cdot + \varepsilon_s(\lambda^\cdot + 4R^\cdot/R)/2 = 0, \tag{7}$$

$$\varepsilon_f' + 4\varepsilon_f R'/R - \varepsilon_s\nu'/2 = 0, \tag{8}$$

где $\varkappa = 8\pi k/c^4$, Λ — космологический член.

Интегралы, определяющие начальное состояние миров, получены Марковым и Фроловым [2]. Найдем возможные точные решения задачи Коши для (1) — (8). Интегрирование по τ уравнений (2), (4), (6), (7) с учетом (3), (5), (8) приводит к появлению трех физически различных функций от r:

$$\varepsilon_f = Q^2(r)/8\pi R^4, \quad \rho_f = \Phi(r)e^{-\lambda/2}/R^2,$$

$$\varepsilon_s = F(r)e^{-\lambda/2}/R^2, \quad \mathscr{E} = \mathscr{E}_\tau(r) - Q^2/2R,$$

$$Q' = 4\pi\Phi, \ \mathscr{E}_\tau' = 4\pi F f(r),$$

$$f = R'e^{-\lambda/2} + QQ'/4\pi RF.$$

Осталось проинтегрировать (8) по r и (1) по τ, которые теперь преобразуются так:

$$\nu' = 2QQ' e^{\lambda/2} f/\mathscr{E}_\tau' R^2, \tag{9}$$

$$e^{-\nu} \dot{R}^2 = \varkappa(\mathscr{E}_\tau - Q^2/2R)/4\pi R + f^2(1 - QQ'/\mathscr{E}_\tau' R)^2 + \Lambda R^2/3 - 1. \tag{10}$$

Есть по крайней мере три типа миров, для которых переменные в (9) и (10) разделяются:

$$1.\ Q = Q_0, \quad 2.\ R_g = R_{g0}, \quad 3.\ R_f = R_{f0},$$

где $R_g = \varkappa \mathscr{E}_\tau/4\pi$, $R_f = Q^2/2\mathscr{E}_\tau$, нижний нулевой индекс помечает константы. Для них имеем

$$e^\nu = e^{\nu_\tau} \begin{cases} 1 \\ \mathrm{const}^2/R^2, \\ (1 - R_{f0}/R)^2 \end{cases} \qquad e^\lambda = \begin{cases} R'^2/f^2, & Q = Q_0 \\ R'^2 R^2/Q^2 q^2, & R_g = R_{g0}. \\ R'^2/f^2(1 - R_{f0}/R)^2, & R_f = R_{f0} \end{cases}$$

Здесь $\nu_\tau(\tau)$ — произвольная функция от τ из-за допустимости преобразования $\tau = \tau(\tau_1)$ [1], $q = \Phi/F$.

Теперь решение уравнения (10) можно представить в квадратурах:

$$\pm \int e^{\nu_\tau/2} d\tau = \int e^{-\nu_R/2} dR [\varkappa(\mathscr{E}_\tau - Q^2/2R)/4\pi R + (f - qQ/R)^2 + \Lambda R^2/3 - 1]^{-1/2} \tag{11}$$

где $\nu_R(R) = \nu - \nu_\tau$. Интегралы в (11) берутся. При $\Lambda = 0$ они выражаются через элементарные функции, давая решения для разнообразных нестационарных миров. Ограниченность места не позволяет выписать их все. Приведем одно для $Q = Q_0$, $f^2 < 1$:

$$\begin{gathered} R = R_g \left[1 - \left(1 - 4R_f \frac{1 - f^2}{R} \right)^{1/2} \cos\eta \right] \Big/ 2(1 - f^2), \\ \pm \int e^{\nu_\tau/2} d\tau = R_g \left[\eta - \left(1 - 4R_f \frac{1 - f^2}{R_g} \right)^{1/2} \sin\eta \right] \Big/ 2(1 - f^2)^{3/2}. \end{gathered} \tag{12}$$

Существование миров (11) должно обеспечиваться физически допустимыми начальными состояниями, которые найдем интегрированием уравнения (1) по r при $\tau = 0$:

$$\begin{gathered} \pm R'(0) e^{\lambda(0)/2} = [1 - \Lambda R^2(0)/3 - \varkappa(\mathscr{E}_\tau - \\ - Q^2/2R(0))/4\pi R(0) - e^{-\nu(0)} \dot{R}^2(0)]^{1/2}, \end{gathered} \tag{13}$$

где нуль в скобках помечает начальные значения функций, $\lambda(0)$ — произвольная функция от r из-за допустимости преобразования $r = r(r_1)$ [1].

Решение (13) сводится к квадратурам по крайней мере в таких случаях:

1) $Q = Q_0$, $\quad \dot{R}(0) = 0$, $\quad f = \pm\cos\left(\int e^{\lambda(0)/2} dr/2a_0 \right)$;

2) $Q = Q_0$, $\quad \dot{R}(0) = \pm 2^{1/2} e^{\nu(0)/2} \operatorname{sh}\left(\int e^{\lambda(0)/2} dr/2a_0 \right)$,

$$f = \pm \operatorname{ch}\left(\int e^{\lambda(0)/2} dr/2a_0 \right);$$

3) $R_g = R_{g0}$, $\quad \dot{R}(0) = 0$, $\quad \varepsilon_f(0) + \varepsilon_s(0) = \varepsilon_0$;

4) $R_g=R_{g0}$, $R^{\cdot}(0)=0$, $q=q_0$;

5) $R_g=R_{g0}$, $q=q_0$, $\varepsilon_f(0)+\varepsilon_s(0)=\varepsilon_0$;

6) $R_f=R_{f0}$, $R^{\cdot}(0)=0$, $\varepsilon_f(0)+\varepsilon_s(0)=\varepsilon_0$;

7) $R_f=R_{f0}$, $f=f_0$, $\varepsilon_f(0)+\varepsilon_s(0)=\varepsilon_0$;

8) $R^{\cdot}(0)=0$, $q=q_0$, $\varepsilon_f(0)+\varepsilon_s(0)=\varepsilon_0$.

Например, для мира (12) начальные условия 1) дают

$$R(0)=2a_0\sin\chi, \qquad \pm\int e^{\lambda(0)/2}\,dr=2a_0\chi, \tag{14}$$

где $2a_0=(3/\varkappa\varepsilon_0)^{1/2}$.

Проанализируем полученные результаты.

1. Полный заряд системы Q и «свободная энергия» вещества $\mathscr{E}_s{}^0$:

$$Q=4\pi\int\rho_f R^2 e^{\lambda/2}\,dr=4\pi\int\Phi\,dr,$$

$$\mathscr{E}_s{}^0=4\pi\int\varepsilon_s R^2 e^{\lambda/2}\,dr=4\pi\int F\,dr,$$

— не зависят от времени τ, а функции Φ и F имеют смысл линейных плотностей заряда и свободной энергии вещества.

2. Полная энергия системы $\mathscr{E}_r$ не зависит от времени и равна сумме полных энергий вещества $\mathscr{E}_s$ и поля $\mathscr{E}_f$:

$$\mathscr{E}_s=4\pi\int\varepsilon_s R^2 R'\,dr,$$

$$\mathscr{E}_f=4\pi\int\varepsilon_f R^2 R'\,dr+Q^2/2R.$$

Например, в мире (12) с начальным состоянием (14)

$$\mathscr{E}_r=8\pi a_0\sin^3\chi/\varkappa+Q_0{}^2/4a_0\sin\chi.$$

Свободная энергия вещества в нем равна

$$\mathscr{E}_s{}^0=12\pi a_0(\chi-{}^1/_2\sin 2\chi)/\varkappa+Q_0{}^2/4a_0\operatorname{tg}\chi$$

и больше его полной энергии на величину гравитационного дефекта массы.

3. Мир 1 с постоянным зарядом Q_0 представляет собой одиночный заряд, помещенный в незаряженное вещество ($\Phi=0$). Если вещество отсутствует ($F=0$), возникает статический мир Рейсснера — Нордстрема [2], в котором

$$R\equiv r,\quad R^{\cdot}\equiv 0,\quad e^{\nu}=e^{-\lambda}=1-\Lambda r^2-\varkappa(\mathscr{E}_{r0}-Q_0{}^2/2r)/4\pi r.$$

4. В мире 2 с постоянным гравитационным радиусом R_{g0} (постоянной полной энергией $\mathscr{E}_{r0}$) и в мире 3 с постоянным «классическим радиусом» R_{f0} заряд Q распределен по системе. Например, реализация начальных условий 4) дает

$$R(0)=R_{g0}(1+\sin\chi)/2,\qquad \pm\int e^{\lambda(0)/2}\,dr=R_{g0}(\chi-\cos\chi)(\varkappa/8\pi q_0{}^2-1)^{1/2}/2;$$
$$Q=\pm R_{g0}\cos\chi/2q_0(\varkappa/8\pi q_0{}^2-1)^{1/2}.$$

Отметим, что свободная энергия вещества в данном мире всегда больше критической $ec^2/k^{1/2}$, т. е. энергии системы, гравитационный радиус которой равен классическому.

5. Миры 1 и 3 при $Q=0$ переходят в миры Толмана — Фридмана [1], а мир 2 возможен только при наличии заряда, так как постоянство полной

энергии в нем обеспечивается компенсацией гравитационного притяжения электростатическим отталкиванием зарядов.

II. Среди решений (11), (13) есть миры, в которых электрическое поле мало в период максимального расширения, но достигает значительной величины на определенных участках на ранней стадии их развития.

Рассмотрим движение частицы с зарядом e и энергией покоя $\mathscr{E}_0$ в таких системах. Учтем для общности потери энергии при рассеянии в поле изотропного излучения с плотностью энергии ε_W [1]:

$$\mathscr{E}_0\left(\frac{du^i}{ds}+\Gamma_{kl}{}^i u^k u^l\right)=eF^{ik}u_k+\sigma(T^{ik}u_k-u^iu_ku_lT^{kl}), \tag{15}$$

где $\sigma=8\pi(e^2/\mathscr{E}_0)^2/3$, отличные от нуля компоненты тензоров F_{ik} и T^{ik} равны:

$$F_{01}=(8\pi\varepsilon_f)^{1/2}\exp[-(\nu+\lambda)/2],$$

$$T^{00}=\varepsilon_W e^{-\nu},\quad T^{11}=T^{22}=T^{33}=\varepsilon_W e^{-\lambda}/3.$$

Для радиального движения интервал между событиями равен:

$$ds=e^{\nu/2}(1-\beta^2e^{-\nu})^{1/2}d\tau,$$

где $\beta=e^{\lambda/2}dr/d\tau$. Пусть лоренц-фактор $\gamma=\mathscr{E}/\mathscr{E}_0$ равен u_0:

$$\gamma=e^{\nu/2}(1-\beta^2e^{-\nu})^{-1/2}.$$

Тогда (15) можно записать в энергетическом виде:

$$d\gamma/d\tau=-4\sigma\varepsilon_W(1-e^\nu/\gamma^2)\gamma^2/3\mathscr{E}_0+[\dot\nu-$$
$$-\dot\lambda(1-e^\nu/\gamma^2)]\gamma/2+e(8\pi\varepsilon_f)^{1/2}(1-e^\nu/\gamma^2)^{1/2}e^\nu/\mathscr{E}_0. \tag{16}$$

В наиболее интересном случае сильно искривленного пространства или сильно релятивистской частицы, когда $\gamma e^{-\nu/2}\gg1$, уравнение (16) упрощается, принимая форму уравнения Риккати:

$$d\gamma/d\tau=-4\sigma\varepsilon_W\gamma^2/3\mathscr{E}_0+(\nu-\lambda)^{\boldsymbol\cdot}\gamma/2+e(8\pi\varepsilon_f)^{1/2}e^\nu/\mathscr{E}_0. \tag{17}$$

Уравнение (17) решается строго, если $\varepsilon_W=0$. В отсутствие радиационных потерь решение имеет вид:

$$\gamma=\exp\left(\int(\nu-\lambda)^{\boldsymbol\cdot}\,d\tau/2\right)\left[C_0+e\int(8\pi\varepsilon_f)^{1/2}\exp\left(\nu-\int(\nu-\lambda)^{\boldsymbol\cdot}\,d\tau/2\right)d\tau\right],$$

где C_0 — постоянная. В нейтральном мире ($\varepsilon_f=0$) энергия частицы уменьшается при расширении системы ($\nu\to0$, $\lambda\to0$). Это согласуется с выводами [1] о движении частиц во вселенной Фридмана. В заряженном мире появляется возможность роста энергии приходящих частиц за счет ускорения их в электрическом поле.

Для системы с излучением (17) проинтегрировать не удается. Но если частица все время чувствует ускоряющее поле, то находим выражение для предельной энергии:

$$\gamma_m=3\mathscr{E}_0(\nu-\lambda)^{\boldsymbol\cdot}\{1\pm[1+$$
$$+64\sigma e(8\pi\varepsilon_f)^{1/2}e^\nu/3\mathscr{E}_0{}^2(\nu-\lambda)^{\boldsymbol\cdot 2}]^{1/2}\}/16\sigma\varepsilon_W, \tag{18}$$

где ε_f, ε_W, ν, λ берутся в точке, где $d\gamma/d\tau=0$.

Рассмотрим случай, когда предельная энергия достигается в момент максимального расширения, который назовем начальным [2]. Выберем в качестве начального условия $\dot R(0)=0$. При $\dot R\to0$ величина $(\nu-\lambda)^{\boldsymbol\cdot}\to0$ и (18) упрощается:

$$\gamma_m=[3e(8\pi\varepsilon_f)^{1/2}e^\nu/4\sigma\varepsilon_W]^{1/2}.$$

Предельная энергия ускоряемых частиц определяется начальными значениями плотностей энергии поля и изотропного излучения и слабо зависит от величины электрического поля в момент максимального расширения.

Использование представления нестационарного заряженного мира в космологии (например, [3]) связано с решением ряда задач [4], выходящих за рамки данной работы.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Я. Б. Зельдовичу, А. С. Компанейцу, И. Д. Новикову и В. П. Фролову за обсуждение работы и критику.

Московский инженерно-физический институт

Поступило в редакцию 18 июня 1974 г.

Литература

[1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теория поля, «Наука», 1967, гл. X–XII.
[2] М. А. Марков, В. П. Фролов. ТМФ, **13**, 41, 1972.
[3] K. Suga, H. Sakuyama, S. Kawaguchi, T. Hura. Phys. Rev. Lett., **27**, 1604, 1971.
[4] Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков. Релятивистская астрофизика, «Наука», 1967, гл. 21.

THREE TYPES OF SOLUTIONS OF THE EINSTEIN—MAXWELL EQUATIONS

Yu. A. Khlestkov

Three types of exact solutions of the Cauchy problem for the equations of gravitation which depend on two arbitrary functions of the radial coordinate and a constant are obtained for centrally symmetric nonstationary worlds consisting of dust matter and the electromagnetic field of charges. An expression is derived for the extreme energy of particles accelerated by an electric field and scattered in the field of isotropic radiation in such worlds.